GYMNASIUM SIEGBURG ALLEESTRASSE

ABIBAC-SCHULE • CERTILINGUA • MUSIK-PROFIL

Fachspezifisches Konzept der Leistungsbewertung im Fach Mathematik

des Gymnasiums Siegburg Alleestraße

Stand: 22.08.2024

1. Grundsätze der Leistungsbewertung im Fach Mathematik am GSA

Im Fachbereich Mathematik gilt für die Leistungsbewertung die für das GSA eingeführten Grundsätze der Leistungsbewertung, wie sie im „Allgemeinen Konzept der Leistungsbewertung“ des GSA festgelegt sind. Darüber hinaus gelten die rechtlich verbindlichen Grundsätze der Leistungsbewertung, wie sie im Schulgesetz (§ 48 SchulG) sowie in der Ausbildungs- und Prüfungsordnung für die Sekundarstufe I (§ 6 APO – SI) dargestellt sind.

Bei der Leistungsbewertung hat – sowohl in der Sekundarstufe I als auch in der Sekundarstufe II – die „Sonstige Leistungen im Unterricht“ sowie die „Schriftlichen Arbeiten“ den gleichen Stellenwert (Kernlehrplan Mathematik, S. 36). Dagegen werden die Ergebnisse der Lernstanderhebung in der Jahrgangsstufe 8 lediglich ergänzend und in angemessener Form bei der Leistungsbewertung berücksichtigt und können im Fach Mathematik nicht als Ersatz einer „Schriftlichen Arbeit“ gewertet werden.

2. Bewertung schriftlicher Arbeiten

2.1 Anzahl und Dauer

Die Anzahl und Dauer (in genauer Länge, ohne Pausen) der Klassenarbeiten in der Sekundarstufe I, bzw. der Klausuren in der Sekundarstufe II ist in folgender Übersicht festgelegt:

Sekundarstufe I

Jahrgang	**Anzahl**	**Länge**	**davon hilfsmittelfrei**
5 - 7	6	45	--
8	4	60	optional
9	4	60-90	optional
10	3 + ZP10	90	ca.20min

Sekundarstufe II

	GK		LK	
Jahrgang	**Klausurlänge**	**davon hilfsmittelfrei**	**Klausurlänge**	**davon hilfsmittelfrei**
EF	90	20	--	--
Q1.1	90	20	135	35
Q1.2	135	35	180	45
Q2.1	180	45	225	60
Q2.2	255*	100*	300*	110*

*inklusive Auswahlzeit

2.2 Kriterien der Bewertung

Die Bewertung der schriftlichen Leistungen orientiert sich an den Kriterien, wie sie in dem Kernlehrplan und dem schulinternen Curriculum beschrieben sind. Letzteres wird in der Oberstufe jedes Jahr mit den Vorgaben des Zentralabiturs abgeglichen und aktualisiert. Im Fach Mathematik ist bei der Bewertung sowohl die Richtigkeit der Lösung und des Lösungsweges als auch die Eigenständigkeit der Problemlösung und die richtige mathematisch formale und sprachliche Darstellung zu beachten.

Für die Beurteilung der Klassenarbeiten in der Sekundarstufe I bzw. der Klausuren der Qualifikationsphase gelten folgende verbindliche Notenschlüssel:

Sekundarstufe I

Note	***Prozent (min.)***
1	88
2	75
3	63
4	50
5	20
6	0

Qualifikationsphase

Notenpunkte	***Prozent*** *(min.)*
15	95
14	90
13	85
12	80
11	75
10	70
9	65
8	60
7	55
6	50
5	45
4	40
3	33
2	26
1	20
0	0

Die Beurteilung der Klausuren der Einführungsphase orientiert sich an dem Notenschlüssel der Zentralen Klausur der Einführungsphase des jeweiligen Vorjahres. Einsehbar auf www.standardsicherung.de

3. Bewertung der sonstigen Mitarbeit

Zu den „Sonstigen Leistungen“ gehören nicht nur mündliche Beiträge, wie z.B.:

- Beiträge zum Unterrichtsgeschehen (auch in Phasen der Gruppen- und Partnerarbeit)
- Wiederholendes Unterrichtsgespräch mit Augenmerk auf den Einzelnen
- Präsentationen

sondern auch unabhängig von den Klausuren erbrachte schriftliche Leistungen, wie z.B.:

- Referate und mündliche Vorträge
- Produkte im Unterricht (z.B. Plakate als Ergebnis aus Gruppenarbeiten)
- kooperative Leistungen im Rahmen von Gruppenarbeiten (Anstrengungsbereitschaft, Teamfähigkeit, Zuverlässigkeit)
- im Unterricht eingeforderte Leistungsnachweise, z. B. vorgetragene Hausaufgaben oder Aufgaben zum Üben und Wiederholen sowie Protokolle einer Einzel- oder Gruppenarbeitsphase
- kurze, schriftliche Übungen (Tests sollen nicht stärker als die Mitarbeit einer einzelnen Unterrichtstunde bewertet werden)

Die Note für die sonstige Mitarbeit setzt sich aus der Gesamtheit aller kontinuierlich erbrachten Leistungen des Schülers/ der Schülerin im Unterricht zusammen. Die sonstige Mitarbeit wird mit 50 Prozent der Gesamtnote gewichtet. Bei Schülern der Sekundarstufe II wird eine eigenständige Beteiligung am Unterricht vorausgesetzt („Bring-Schuld"). Eine Indikatorenliste zur Bewertung der Sonstigen Mitarbeit im Unterricht der Sekundarstufe II ist dem allgemeinen Konzept der Leistungsbewertung zu entnehmen.

4. Bewertung der Facharbeit

In der Qualifikationsstufe 1 (Q1) ist eine verpflichtende Facharbeit in einem schriftlich belegten Fach zu erstellen. Die Bewertung der Facharbeit im Fach Mathematik erfolgt dabei über das unten dargestellte Bewertungsraster, gegliedert nach Form, Darbietung und Aufbau sowie Inhalt und Fachbezug.

1 Form

1.1 Druckfertigkeit der Facharbeit

Einhalten der Vorschriften über die äußere Form (Deckblatt, Seitenzählung...) und den Umfang	1		korrekt
	0		fehlerhaft
Kennzeichnung von Zitaten und Fähigkeit, korrekt zu zitieren; konsequenter Quellennachweis; Übersichtlichkeit des Literatur- und Abbildungsverzeichnisses	2		klar, korrekt
	1		nur teilweise korrekt
	0		fehlerhaft, unklar

Schriftbild, Zeilenspiegel, Rand; Sauberkeit von Tabellen und Zeichnungen	3		sehr sauber, fehlerfrei
	2		unbedeutende Fehler
	1		noch brauchbar
	0		unordentlich
Einhaltung der Normen der deutschen Sprache (Orthographie, Grammatik, Interpunktion)	2		nahezu fehlerfrei
	1		keine schweren Fehler
	0		häufige bzw. schwere Fehler

1.2 Deutlichkeit der Gliederung

Untergliederung; Überschriften; Übersichtlichkeit des Seitenbildes	2		sofort erkennbar
	1		nur in Teilen erkennbar
	0		kaum zu erkennen

Teilbewertung Form	max. 10

2 Darbietung und Aufbau

2.1 Sprachstil

Wortwahl, Satzbau, sprachlicher Ausdruck	2		klar und gewandt
	1		noch brauchbar
	0		sehr schwerfällig, holprig

2.2 Einsatz und Einbau von Anschauungsmaterial (Bilder, Skizzen, Grafiken, Tabellen, Modelle...)

anschaulich, präzise, themenbezogen, textbezogen	6		sehr überzeugend und sinnvoll
	4		insgesamt sinnvoll
	2		in etwa noch brauchbar
	0		nicht mehr brauchbar

2.3 Gliederung und Strukturierung der Arbeit

(1) Auswahl und Gewichtung der verschiedenen Aspekte des Themas; (2) Gliederungsgesichtspunkte; (3) Gedankenführung beim Verküpfen von Sätzen, Abschnitten und Kapiteln; (4) Argumentations- und Begründungszusammenhänge; (5) Verhältnis von Zitat und eigener Aussage sowie Textteil und Anhang	12		überaus angemessen (1), sehr sinnvoll (2), stets folgerichtig (3), immer schlüssig (4) und sehr ausgewogen (5)
	9		meist... (1–5)
	6		nur in Teilen (1–5)
	3		einseitige Auswahl und Gewichtung; wenig sinnvolle und unzweckmäßige Gliederung; teilweise bloßes Aneinanderreihen von Gedanken und Abschnitten; Verhältnis unausgewogen
	0		nicht mehr nachvollziehbare Auswahl und Gewichtung; keine erkennbare, auch nur halbwegs sinnvolle Gliederung, zusammenhangloses Aneinanderreihen von Gedanken und Abschnitten; völlig unzureichendes Verhältnis

Teilbewertung Darbietung und Aufbau	max. 20

3 Inhalt und Fachbezug

3.1 Eigenständigkeit und Selbstständigkeit

Literaturbeschaffung und Auswahl; Materialbeschaffung und Auswahl; Auswahl und Begründung von Verfahren und Experimenten; Planung, Durchführung und Auswertung von Experimenten und Bau von Modellen; Anwendung erworbener Kenntnisse und Fähigkeiten	10		umfassend, sicher, geschickt
	8		meist umfassend, ...
	6		nur in Teilen umfassend...
	4		noch angemessen
	2		teilweise oberflächlich
	0		oberflächlich, unbeholfen

3.2 Fachspezifische Fähig- und Fertigkeiten

fachliche Ausdrucksweise (Fachsprache, Fachbegriffe, Fachsymbolik)	2		sehr sicher
	1		einigermaßen geübt
	0		sehr unsicher
Einsatz von Materialien, Anführen von Beispielen (sachbezogen und zweckmäßig; vollständig und vielfältig); Durchführen von Experimenten, Untersuchungen, Beobachtungen, Befragungen; Bau von Modellen; Auswahl, Planung, Durchführung, Beobachtung, Protokollierung, Dokumentation, Auswertung	8		überragend, sehr einfallsreich, umfassend
	6		angemessen, brauchbar
	4		in etwa angemessen, fast immer brauchbar
	2		nur noch in Teilen angemessen und brauchbar
	0		nicht mehr vertretbar, total unbrauchbar, zu lückenhaft

3.3 Geistigen Durchdringen der Arbeit

Unterscheiden von Fakten und Meinungen, eigenen und referierten Ergebnissen; sachgemäße Auswertung und kritisches Beurteilen von Literatur, Bildern und Skizzen, Statistiken und Diagrammen, Experimenten und Modellen, Aussagen und Beobachtungen	10		uneingeschränkt klar
	8		meist klar
	6		einigermaßen klar
	4		noch gemessen
	2		nur Teilaspekte erfassend
	0		ohne Logik

Teilbewertung Inhalt und Fachbezug	max. 30

Gesamtbewertung	max. 60

Note

Die Notenbildung richtet sich nach folgender Punkteverteilung:

Mindestpunktzahl	Note (Notenpunkte)
0	ungenügend (0)
13	mangelhaft minus (1)
17	mangelhaft (2)
21	mangelhaft plus (3)
25	ausreichend minus (4)
28	ausreichend (5)
31	ausreichend plus (6)
34	befriedigend minus (7)
37	befriedigend (8)
40	befriedigend plus (9)
43	gut minus (10)
46	gut (11)
49	gut plus (12)
52	sehr gut minus (13)
55	sehr gut (14)
58	sehr gut plus (15)

Beispiel einer Klassenarbeit für die Jahrgangsstufe 7

Aufgabe 1 *(6 Punkte)*

Welche der Zuordnungen sind proportional (P), antiproportional(AP), nichts(N) von beiden?

a) Anzahl der Arbeiter → Dauer der Arbeit ( )

b) Haarmenge → Friseurpreis ( )

c) Autogröße → Motorleistung ( )

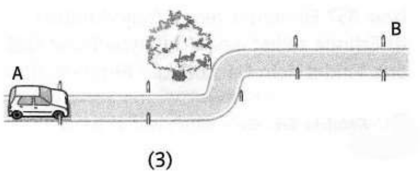
d) Alter → Körpergröße ( )

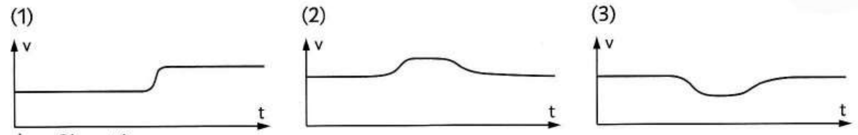
e) Benzinmenge → Preis an der Tankstelle ( )

f) Anzahl Kniebeugen → Anzahl der Herzschläge ( )

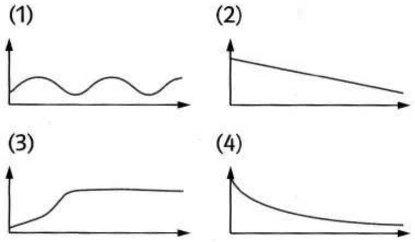
Aufgabe 2: *(7 Punkte)*

a) Ein Auto fährt auf der abgebildeten Straße von A nach B. Begründe, welche der drei abgebildeten Graphen vermutlich zur Zuordnung Zeit → Geschwindigkeit gehört.





b) Ordne die Graphen den Situationen zu.



Brenndauer → Höhe einer brennenden Kerze	
Alter eines Menschen → Körpergröße	
Zeit → Abstand vom Boden zum Schaukelbrett	
Zeit → Temperatur eines sich abkühlenden Getränks	

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Ordne die Wertetabellen <u>begründet</u> den folgenden Zuordnungen zu und gib die Zuordnungsvorschrift an: Proportionale Zuordnung Antiproportionale Zuordnung

a	**x**	1	2	3	4	6
	y	3	6	9	12	18

b	**x**	1	2	3	4	6
	y	18	9	6	4,5	3

c	**x**	3	4	5	8	11
	y	21,75	29	36,25	58	7,25

Aufgabe 4 *(Berechne mit dem Dreisatz, 4 Punkte)*

Herr Louis verkauft auf dem Wochenmarkt 12 Eier für 1,80€.
Berechne den Preis für 10 Eier.

Aufgabe 5 *(4 Punkte)*

Die Studentin Hannah kommt mit ihrem Geld 30 Tage aus, wenn sie 18 € pro Tag ausgibt. Wie lange würde ihr Geld ausreichen, wenn sie pro Tag 20 € ausgeben würde?

Aufgabe 6 *(Berechne mit dem Dreisatz, 5 Punkte)*

Die Nachbarn Cardenas und Egerter kaufen zusammen 7200 l Heizöl und bezahlen dafür 5760 €.
Nachbar Cardenas zahlt 1280€, Nachbar Egerter den Rest. Wie viel Heizöl hat jeder erhalten?

Aufgabe 7 *(5 Punkte)*
Das Taxiunternehmen Schürmann verlangt 3 € Grundpreis für eine Fahrt.
Milana zahlte für eine 24 km lange Fahrt 33 €.

Wie teuer ist eine 18 km lange Fahrt mit diesem Taxiunternehmen?

Viel Erfolg!

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Lösungen</th><th>Punkte</th></tr>
<tr><td>1</td><td>a) Anzahl der Arbeiter→Dauer der Arbeit (AP)
b) Haarmenge→Friseurpreis (N)
c) Autogröße→Motorleistung (N)
d) Alter→Körpergröße (N)
e) Benzinmenge→Preis an der Tankstelle (P)
f) Anzahl Kniebeugen→Anzahl der Herzschläge (N)</td><td>/6</td></tr>
<tr><td>2a

2b</td><td>Beim 2. Graph würde das Auto in der Kurve schneller werden und danach wieder langsamer.
Beim 1. Graph würde das Auto in der Kurve beschleunigen und danach mit schnellerer Geschwindigkeit als zuvor weiterfahren.
Der 3. Graph gehört zu der Zuordnung Zeit→Geschwindigkeit, da das Auto während es durch die Kurve fährt etwas abbremsen muss und daher Geschwindigkeit verliert. Da die Kurve sehr eng ist und nicht in der Kurve beschleunigt werden kann muss Graph 3 zu der Zuordnung gehören.
Richtige Ordnung: 2,3,1,4</td><td>/3

/4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Es herrscht Quotientengleichheit, daher muss es sich um eine proportionale Zuordnung handeln: $y = 3x$
Es herrscht Produktgleichheit, daher muss es sich um eine antiproportionale Zuordnung handeln: $y = \frac{18}{x}$
Es herrscht Quotientengleichheit, daher muss es sich um eine proportionale Zuordnung handeln: $y = 7{,}25x$</td><td>/3

/3

/3</td></tr>
<tr><td>4</td><td><table><tr><td>Eier</td><td>€</td></tr><tr><td>12</td><td>1,8</td></tr><tr><td>1</td><td>0,15</td></tr><tr><td>10</td><td>1,5</td></tr></table>10 Eier kosten 1,5€</td><td>/4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$p = 30 \cdot 18 = 540$
Zuordnungsvorschrift: $y = \frac{540}{x}$
$y = \frac{540}{20} = 27$ Hannah würde 27 Tage mit dem Geld auskommen.</td><td>/4</td></tr>
<tr><td>6</td><td><table><tr><td>L Heizöl</td><td>€</td></tr><tr><td>7200</td><td>5760</td></tr><tr><td>1,25</td><td>1</td></tr><tr><td>1600</td><td>1280</td></tr></table>7200-1600=5600
Frau Cardenas erhält 1600 l Heizöl und Herr Egerter erhält 5600l Heizöl</td><td>/5</td></tr>
<tr><td>7</td><td>33€-3€=30€ kostet eine Fahrt von 24km ohne Grundpreis<table><tr><td>km</td><td>€</td></tr><tr><td>24</td><td>30</td></tr><tr><td>1</td><td>1,25</td></tr><tr><td>18</td><td>22,5</td></tr></table>22,5 €+3 €=25,5 €
Eine 18km lange Fahrt kostet bei dem Taxiunternehmen Schürmann 25,50€</td><td>/5</td></tr>
<tr><td></td><td>Ordnungspunkte</td><td>/2</td></tr>
<tr><td></td><td>Gesamtpunktzahl</td><td>/42</td></tr>
</table>

Beispiel einer Klausur für die Jahrgangsstufe EF („Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase – 2016“)

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1: Analysis

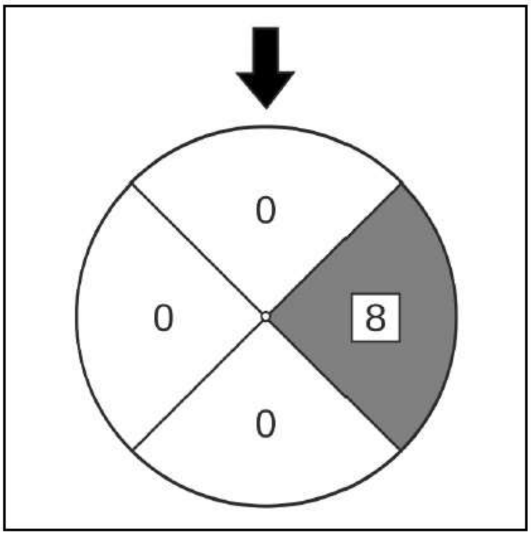
Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 2$.

Untersuchen Sie die Funktion f rechnerisch auf lokale Minimal- und Maximalstellen.

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Stochastik

Beim Spiel „Die wilde 8“ wird das Glücksrad mit den beiden Zahlen 0 und 8 (siehe *Abbildung*) zweimal gedreht.



Abbildung

a) *Erstellen Sie für dieses Zufallsexperiment ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.*

(2 Punkte)

b) Die beiden Zahlen in den Feldern, auf die jeweils der Pfeil zeigt, werden addiert.

(1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich*

- *die Summe* 0 *ergibt,*
- *die Summe* 8 *ergibt,*
- *die Summe* 16 *ergibt.*

(2) Der Spieleinsatz für das zweimalige Drehen des Glücksrades beim Spiel „Die wilde 8“ beträgt 8 €.

- Bei der Summe 0 gibt es keine Auszahlung, der Spieleinsatz ist verloren.
- Bei der Summe 8 wird der Spieleinsatz zurückgezahlt.
- Bei der Summe 16 wird der zehnfache Spieleinsatz ausgezahlt.

Der Spielleiter behauptet, das Spiel sei „fair“. Das heißt, dass ein Spieler auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust macht.

Untersuchen Sie, ob es sich wirklich um ein faires Spiel handelt.

(2 + 2 Punkte)

Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=\frac{1}{48}\cdot x^3-\frac{3}{8}\cdot x^2+\frac{27}{16}\cdot x+1$.

Die *Abbildung 1* zeigt den Graphen von f.

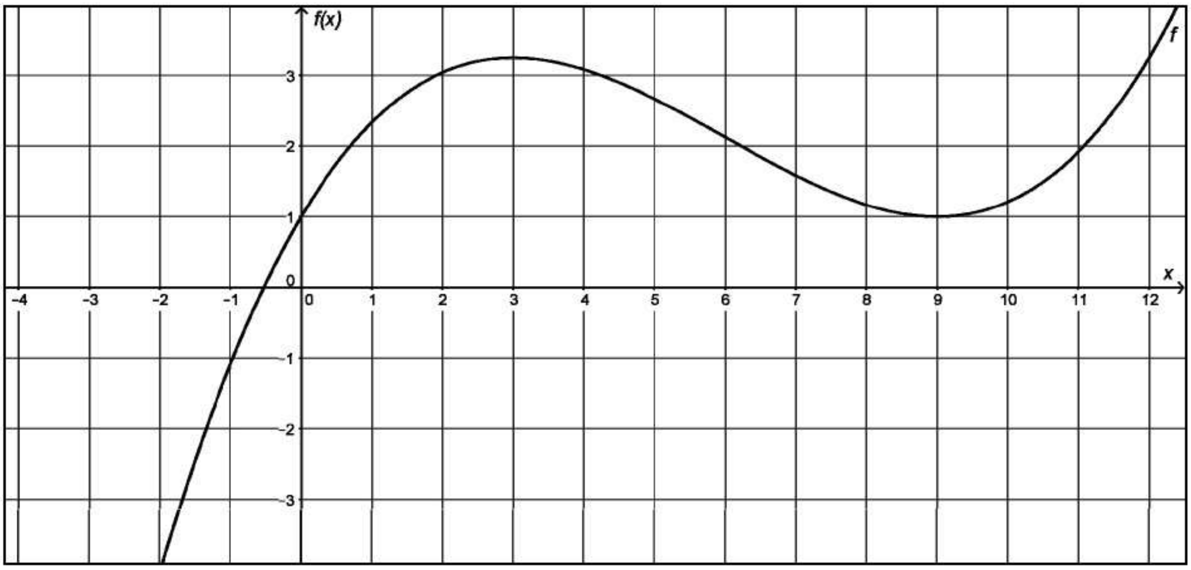


Abbildung 1

a) (1) *Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung der Geraden s durch die Punkte* $H\left(3\,\middle|\,\frac{13}{4}\right)$ *und* $T(9\,|\,1)$.

[Zwischenergebnis: Die Gerade s hat die Steigung $-\frac{3}{8}$.]

(2) Es gibt zwei Stellen, an denen der Graph von f Tangenten hat, die parallel zur Geraden s verlaufen.

Ermitteln Sie diese Stellen auf zwei Nachkommastellen genau.

(5 + 4 Punkte)

b) Gegeben ist zusätzlich die Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{48} \cdot x^3 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{13}{4}.$$

(1) *Zeichnen Sie den Graphen von g in die Abbildung 1 ein.*

Der Graph der Funktion g geht durch eine Transformation aus dem Graphen der Funktion f hervor.

(2) *Geben Sie diese Transformation an.*

(3) *Geben Sie eine Funktionsgleichung von g an, aus der die Transformation deutlich wird, durch die der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.*

(4 + 2 + 2 Punkte)

c) Die folgenden *Abbildungen 2.1* bis *2.5* veranschaulichen, wie man den Wert der Ableitung $f'(2)$ näherungsweise ermitteln kann.

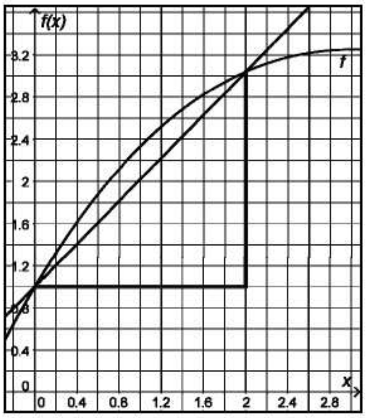


Abbildung 2.1

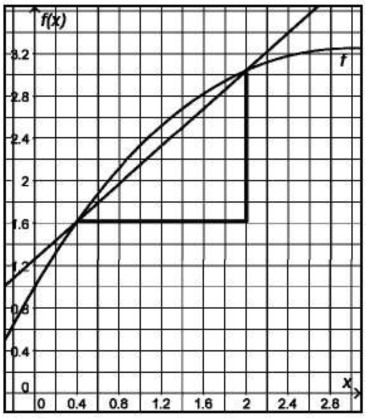


Abbildung 2.2

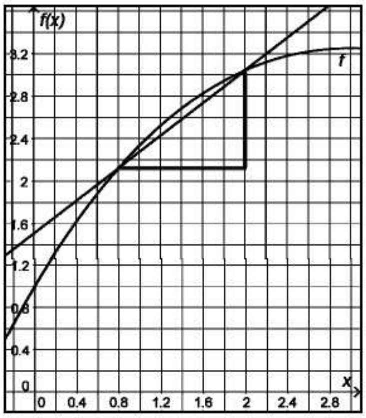


Abbildung 2.3

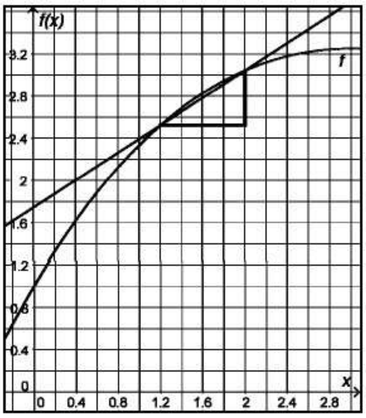


Abbildung 2.4

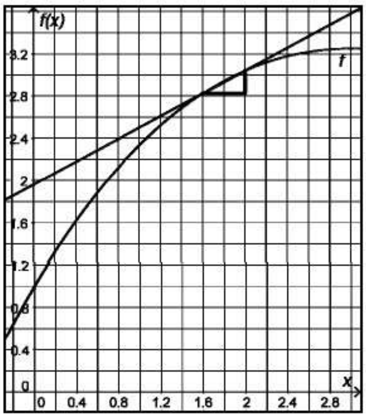


Abbildung 2.5

(1) *Geben Sie an, welche Abbildung zum Differenzenquotienten* $\dfrac{f(2)-f(0{,}8)}{2-0{,}8}$ *gehört.*

(2) *Geben Sie an, welche geometrische Bedeutung der Wert* $f'(2)$ *hat.*

Erklären Sie, warum in den Abbildungen 2.1 bis 2.5 veranschaulicht wird, wie dieser Wert immer genauer ermittelt werden kann.

(2 + 5 Punkte)

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Während seines Urlaubs im norwegischen Vardø beobachtet Heinz an einem Tag Anfang August die Sonne. Dabei misst er zu jeder vollen Stunde den Sonnenhöhenwinkel α (siehe *Abbildung 1*), um so zu bestimmen, wie hoch die Sonne über dem Horizont steht.

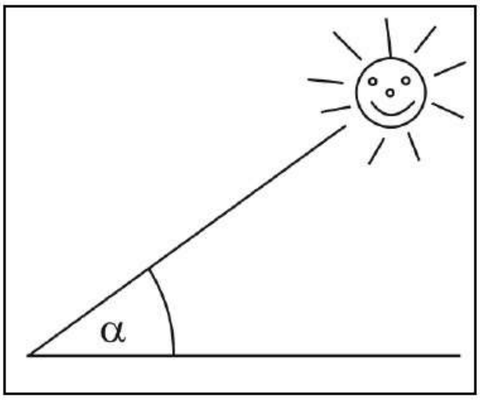


Abbildung 1

Heinz trägt seine Winkelmessungen in ein Koordinatensystem ein (siehe *Abbildung 2*).

Dabei entspricht $t = 0$ der Uhrzeit 12:00 Uhr mittags, $t = 1$ entspricht 13:00 Uhr usw.

Der Uhrzeit 11:00 Uhr entspricht $t = -1$ usw.

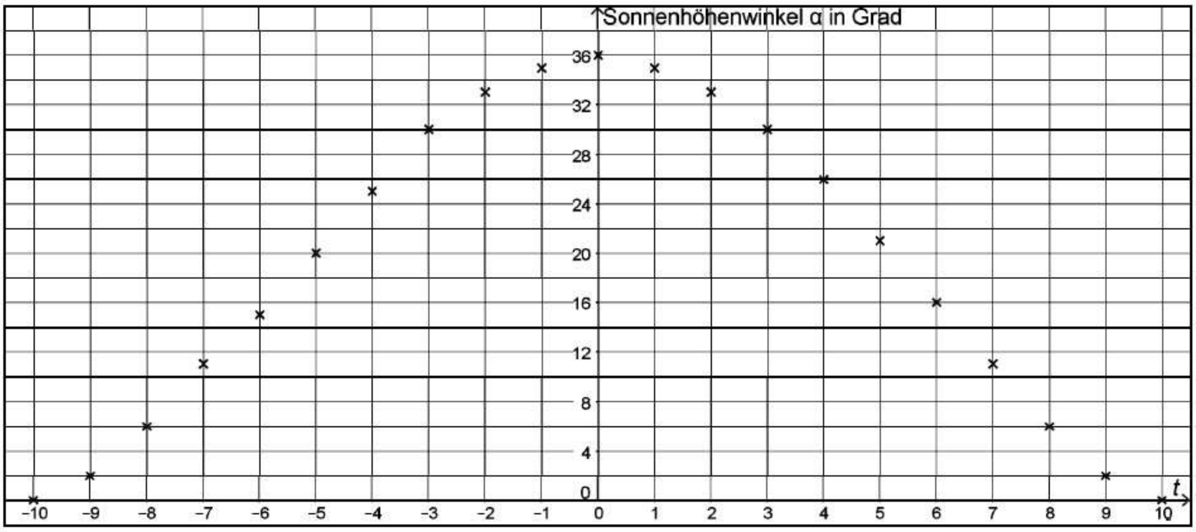


Abbildung 2

a) (1) *Geben Sie den Sonnenhöhenwinkel an, den Heinz um* 7:00 *Uhr morgens misst.*

(2) *Geben Sie an, in welchem Zeitraum Heinz Sonnenhöhenwinkel misst, die mindestens* 30 *Grad betragen.*

(2 + 2 Punkte)

Heinz modelliert anhand seiner Daten den Sonnenhöhenwinkel im Laufe des Tages mit einer ganzrationalen Funktion 4. Grades. Er verwendet dazu für $-10 \le t \le 10$ die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 0,0031 \cdot t^4 - 0,671 \cdot t^2 + 36,1\ .$$

$f(t)$ beschreibt den Sonnenhöhenwinkel in Grad zu der durch t gegebenen Uhrzeit.

b) Die Werte, die sich bei der Modellierung mit der Funktion f ergeben, weichen etwas von den Werten aus der *Abbildung 2* ab.

Berechnen Sie die Abweichung zwischen dem um 7:00 *Uhr morgens gemessenen Wert und dem entsprechenden Funktionswert.*

(2 Punkte)

c) Bei der Messung von Heinz erreicht die Sonne ihren höchsten Stand um 12:00 Uhr mittags (siehe *Abbildung 2*).

Weisen Sie rechnerisch nach, dass auch bei der Modellierung mit der Funktion f die Sonne zu diesem Zeitpunkt ihren höchsten Stand erreicht.

(7 Punkte)

d) (1) *Weisen Sie nach, dass gilt:* $f'(-9) > f'(-2)$.

(2) *Interpretieren Sie diese Ungleichung im Sachzusammenhang.*

(2 + 2 Punkte)

An einem Tag Ende August beobachtet Heinz noch einmal die Sonne in Vardø. Um 04:00 Uhr morgens während des Sonnenaufgangs misst er den Sonnenhöhenwinkel 0 Grad, um 12:00 Uhr mittags ist der Sonnenhöhenwinkel mit 29 Grad maximal. Heinz möchte für diesen Tag den Sonnenhöhenwinkel mit einer ganzrationalen Funktion g modellieren.

e) (1) *Skizzieren Sie in der Abbildung 2 den Verlauf eines möglichen Graphen von g.*

(2) Für die Funktionsgleichung von g wählt Heinz den Ansatz: $g(t) = a \cdot f(b \cdot t)$.

Ermitteln Sie für a und b jeweils einen zu seiner Messung passenden Wert.

(3 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Graphikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Computeralgebrasystem (CAS)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Musterlösungen

Aufgabe 1: Analysis

Modelllösung

$f'(x) = x^2 - 10 \cdot x + 16$

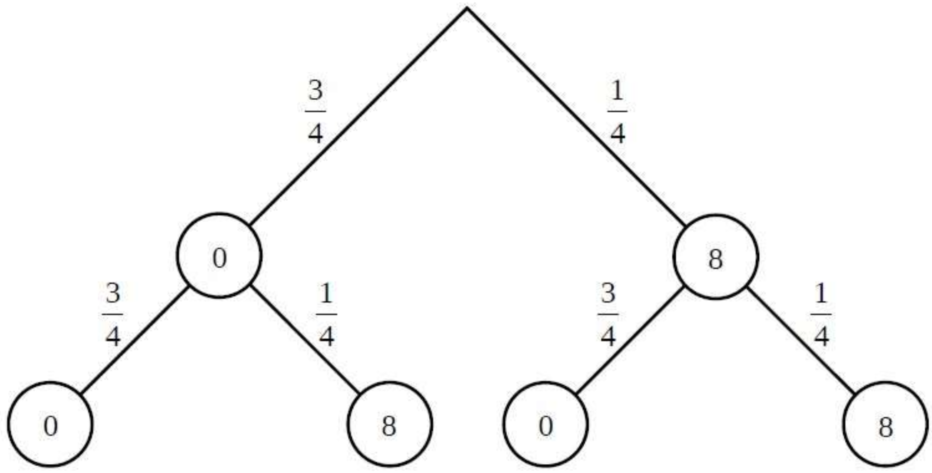
Mit der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ ergeben sich aus $x^2 - 10 \cdot x + 16 = 0$ die beiden Lösungen $x_1 = 5 - \sqrt{5^2 - 16} = 2$ und $x_2 = 5 + \sqrt{5^2 - 16} = 8$.

Zusätzlich gilt $f'(0) = 16 > 0$, $f'(5) = -9 < 0$ und $f'(10) = 16 > 0$. Daher liegt an der Stelle $x_1 = 2$ ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von + nach – und an der Stelle $x_2 = 8$ ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von – nach + vor.

2 ist also eine lokale Maximalstelle und 8 eine lokale Minimalstelle von f.

Aufgabe 2: Stochastik

Modelllösung a)



Modelllösung b)

(1) $P(\text{„Summe 0“}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

$P(\text{„Summe 8“}) = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$P(\text{„Summe 16“}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

(2) Erwartungswert der Auszahlung (ohne Berücksichtigung des Einsatzes):

$$0\,€ \cdot \frac{9}{16} + 8\,€ \cdot \frac{6}{16} + 80\,€ \cdot \frac{1}{16} = 8\,€$$

Auf lange Sicht werden durchschnittlich 8 € pro Spiel ausgezahlt, d. h. ein Spieler erhält seinen Einsatz zurück. Das Spiel ist also fair.

Oder:

Erwartungswert des Gewinns (unter Berücksichtigung des Einsatzes):

$$-8\,€ \cdot \frac{9}{16} + 0\,€ \cdot \frac{6}{16} + 72\,€ \cdot \frac{1}{16} = 0\,€$$

Auf lange Sicht macht ein Spieler weder Gewinn noch Verlust. Das Spiel ist also fair.

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Modelllösung a)

(1) Ansatz: $s: y = m \cdot x + b$

$$m = \frac{1 - \frac{13}{4}}{9-3} = -\frac{3}{8} = -0{,}375$$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $T\left(9 \mid 1\right)$ liefert:

$$-\frac{3}{8} \cdot 9 + b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{35}{8} = 4{,}375\,.$$

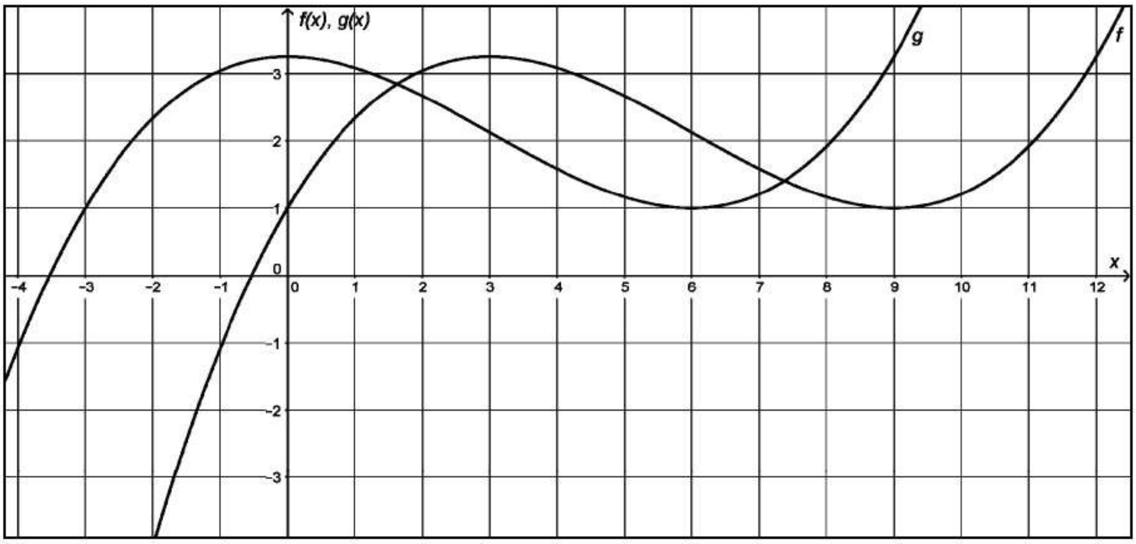
Damit ist die Gleichung der Geraden $s: y = -\frac{3}{8} \cdot x + \frac{35}{8}$.

(2) $f'(x) = \frac{1}{16} \cdot x^2 - \frac{3}{4} \cdot x + \frac{27}{16}$

Aus der Bedingung $f'(x) = -\frac{3}{8}$ ergeben sich die beiden Lösungen $x_1 = 6 - \sqrt{3} \approx 4{,}27$ und $x_2 = 6 + \sqrt{3} \approx 7{,}73$.

Modelllösung b)

(1)



(2) Der Graph von g geht durch eine Verschiebung um 3 Einheiten nach links aus dem Graphen von f hervor.

(3) $g(x) = f(x+3)$

Modelllösung c)

(1) Zum Differenzenquotienten $\dfrac{f(2)-f(0{,}8)}{2-0{,}8}$ gehört die *Abbildung 2.3*.

(2) $f'(2)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $P\left(2 \,\middle|\, f(2)\right)$.

In den *Abbildungen 2.1* bis *2.5* ist jeweils die Steigung einer Sekante durch den Punkt $P\left(2 \,\middle|\, f(2)\right)$ und einen Nachbarpunkt N dargestellt. Der Punkt N läuft auf dem Graphen von f auf den Punkt P zu, die Sekante durch die Punkte N und P nähert sich der Tangente im Punkt P an. Die Steigung der Sekante durch die Punkte N und P entspricht dadurch immer genauer der Steigung der Tangente im Punkt P und somit dem Wert $f'(2)$.

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Modelllösung a)

(1) Um 7:00 Uhr morgens ($t = -5$) misst Heinz den Sonnenhöhenwinkel 20 Grad.

(2) Heinz misst im Zeitraum von 9:00 Uhr bis 15:00 Uhr ($t = -3$ bis $t = 3$) Sonnenhöhenwinkel, die mindestens 30 Grad betragen.

Modelllösung b)

$f(-5) - 20 = 1{,}2625$

Die Abweichung zwischen dem um 7:00 Uhr morgens gemessenen Wert und dem entsprechenden Funktionswert beträgt ungefähr 1,3 Grad.

Modelllösung c)

$f'(t) = 0{,}0124 \cdot t^3 - 1{,}342 \cdot t$

Aus der notwendigen Bedingung $f'(t) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die Lösungen $t_1 \approx -10{,}4$, $t_2 = 0$ und $t_3 \approx 10{,}4$.

t_1 und t_3 befinden sich nicht im betrachteten Intervall $[-10;10]$.

Wegen $f'(-1) = 1{,}3296 > 0$ und $f'(1) = -1{,}3296 < 0$ liegt an der Stelle t_2 ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von + nach – und damit ein lokales Maximum von f vor. Wegen $f(-10) = 0$, $f(0) = 36{,}1$ und $f(10) = 0$ handelt es sich auch um das absolute Maximum von f im Intervall $[-10;10]$.

Auch bei der Modellierung mit der Funktion f erreicht die Sonne um 12:00 Uhr mittags ihren höchsten Stand.

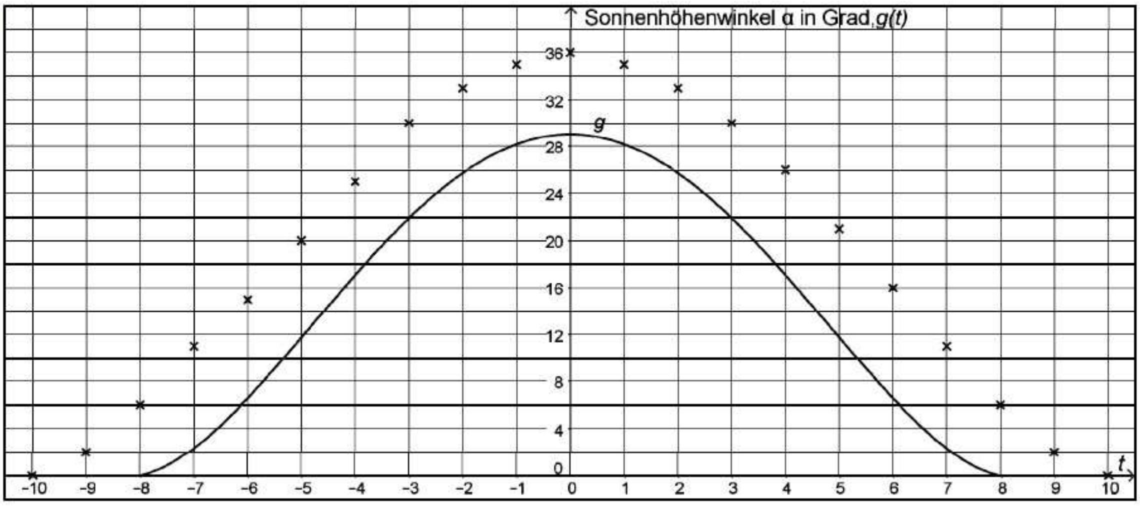
Modelllösung d)

(1) $f'(-9) = 3{,}0384 > 2{,}5848 = f'(-2)$

(2) Die positive lokale Änderungsrate $f'(-9)$ ist größer als die positive lokale Änderungsrate $f'(-2)$, der Sonnenhöhenwinkel nimmt also um 3:00 Uhr morgens schneller zu als um 10:00 Uhr morgens.

Modelllösung e)

(1)



(2) $a = \dfrac{29}{f(0)} = \dfrac{290}{361} \approx 0,80$

$b = \dfrac{-10}{-8} = \dfrac{10}{8} = 1,25$ (Verhältnis der Nullstellen)

[Aufgrund der Symmetrie des Graphen von f ist auch $b = -1,25$ eine richtige Lösung.]

Bewertungsbogen

Aufgabe 1: Analysis

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	gibt $f'(x)$ an.	2	
2	untersucht die Funktion f rechnerisch auf lokale Minimal- und Maximalstellen.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe insgesamt	**6**	

Aufgabe 2: Stochastik

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	erstellt für das Zufallsexperiment ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe a)	**2**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich die Summe 0 ergibt, die Summe 8 ergibt und die Summe 16 ergibt.	2	
2	(2) untersucht, ob es sich wirklich um ein faires Spiel handelt.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………………………….......... ……………………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe b)	**4**	

	Summe insgesamt	**6**	

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) ermittelt rechnerisch eine Gleichung der Geraden s durch die Punkte H und T.	5	
2	(2) ermittelt auf zwei Nachkommastellen genau die Stellen, an denen der Graph von f Tangenten hat, die parallel zur Geraden s verlaufen.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………………………….......... ……………………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe a)	**9**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) zeichnet den Graphen von g in die *Abbildung 1* ein.	4	
2	(2) gibt die Transformation an, durch die der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.	2	
3	(3) gibt eine Funktionsgleichung von g an, aus der die Transformation deutlich wird, durch die der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe b)	**8**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) gibt an, welche Abbildung zum Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(0,8)}{2-0,8}$ gehört.	2	
2	(2) gibt an, welche geometrische Bedeutung der Wert $f'(2)$ hat.	2	
3	(2) erklärt, warum in den *Abbildungen 2.1* bis *2.5* veranschaulicht wird, wie dieser Wert immer genauer ermittelt werden kann.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe c)	**7**	

	Summe insgesamt	**24**	

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) gibt den Sonnenhöhenwinkel an, den Heinz um 7:00 Uhr morgens misst.	2	
2	(2) gibt an, in welchem Zeitraum Heinz Sonnenhöhenwinkel misst, die mindestens 30 Grad betragen.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………………............. ……………………………………………………………………….............			
	Summe Teilaufgabe a)	**4**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	berechnet die Abweichung zwischen dem um 7:00 Uhr morgens gemessenen Wert und dem entsprechenden Funktionswert.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) ………………………………………………………………………............. ……………………………………………………………………….............			
	Summe Teilaufgabe b)	**2**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	gibt $f'(t)$ an.	2	
2	weist rechnerisch nach, dass auch bei der Modellierung mit der Funktion f die Sonne um 12:00 Uhr mittags ihren höchsten Stand erreicht.	5	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ………………………………………………………………………............. ……………………………………………………………………….............			
	Summe Teilaufgabe c)	**7**	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) weist nach, dass gilt: $f'(-9) > f'(-2)$.	2	
2	(2) interpretiert diese Ungleichung im Sachzusammenhang.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe d)	**4**	

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	(1) skizziert in der *Abbildung 2* den Verlauf eines möglichen Graphen von g.	3	
2	(2) ermittelt für a einen zur Messung passenden Wert.	2	
3	(2) ermittelt für b einen zur Messung passenden Wert.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ……………………………………………………………………………............ ……………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe e)	**7**	

	Summe insgesamt	**24**	

Festlegung der Gesamtnote

	Lösungsqualität	
	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
Übertrag der Punktsumme aus der ersten Aufgabe	**6**	
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten Aufgabe	**6**	
Übertrag der Punktsumme aus der dritten Aufgabe	**24**	
Übertrag der Punktsumme aus der vierten Aufgabe	**24**	
Gesamtpunktzahl	**60**	

Note